التصحيح النموذجي لامتحان السداسي الثاني، رياضيات.

التمرين الأول:

1/- حساب الصور:

$f(1,3) = (1^2+1)\sqrt{3+1} = 2\sqrt{4} = \boxed{4}$ 0,5

$f(-2,0) = ((-2)^2+1)\sqrt{0+1} = \boxed{5}$ 0,5

$g(0,1) = (0^2-1)\ln(1-0) = 0$ 0,5

$g(0,0) = (0^2-1)\ln(0+0) = -1\ln(0)$ غير ممكنة

0,5

2/- إيجاد منطقة التعريف:

$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y+1\geq 0\}$ 0,25

$= \{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, y\geq -1\}$. 0,25

$D_g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y-x>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y>x\}$

0,25 0,25

3/- حساب المشتقات الجزئية:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2+1}{2\sqrt{y+1}}$ 0,25

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sqrt{y+1}$ 0,25

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\sqrt{y+1}$ 0,25

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-1}{y-x}$ 0,25

التمرين الثاني :

1/ حل المعادلات التفاضلية .

1/- $xy' + (1+x)y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1+x}{x} y$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1+x}{x} dx$ 1

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{1}{x} - 1\right) dx$

$\Rightarrow \ln|y| = -\ln x - x + c$ 0,5

$y = K e^{-\ln(x) - x} = \boxed{\frac{K}{x} e^{-x}} / K = \mp e^{c} \in \mathbb{R}$

2/- $(e^{x}+1)y' + e^{x}y = e^{x}+1 \Leftrightarrow y' + \frac{e^{x}}{e^{x}+1} y = 1$ ---(E)

وهي معادلة غير متجانسة ، إذا نأخذ المعادلة المتجانسة من الشكل :

$y' + \frac{e^{x}}{e^{x}+1} y = 0$ --- (E_2') 0,5

إذن : $y' = -\frac{e^{x}}{e^{x}+1} y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{e^{x}}{e^{x}+1} dx$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{e^{x}}{e^{x}+1} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln(e^{x}+1) + c$

$\Rightarrow y = \pm e^{c} e^{-\ln(e^{x}+1)} = k e^{\ln\left(\frac{1}{e^{x}+1}\right)} = \boxed{\frac{k}{e^{x}+1}} / k \in \mathbb{R}$ 0,5

إذن حل المعادلة (E_2') هو $y = \frac{k}{e^{x}+1}$ ونضع $k = k(x)$

نجد $y' = \frac{k'(x)(e^{x}+1) - e^{x}k(x)}{(e^{x}+1)^2}$.

نعوض في (E_2) نجد : $\frac{k'(x)}{e^{x}+1} - \cancel{\frac{e^{x}k(x)}{(e^{x}+1)^2}} + \cancel{\frac{e^{x}k(x)}{(e^{x}+1)^2}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{K'(x)}{e^x+1} = 1 \Leftrightarrow K'(x) = e^x+1 \Leftrightarrow K(x) = e^x + x + c$

إذن حل المعادلة (E_2) هو $\boxed{y = \frac{e^x+x+c}{e^x+1}}$ $/ c \in \mathbb{R}$ (0,5)

/2- حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

1/- $y'' - 6y' + 9y = 0 \;\; \dots (E_3)$

نضع $y = e^{mx}$ أي $y' = m e^{mx}$ و $y'' = m^2 e^{mx}$

نعوض في (E_3) نجد: $(m^2 - 6m + 9) e^{mx} = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 = 0$ (0,5)

$\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$ (0,5)

إذن يوجد حل وحيد مضاعف هو $m_0 = \frac{-b}{2a} = 3$

إذن حل المعادلة من الشكل: $\boxed{y = (c_1 x + c_2) e^{3x}}$ (0,5) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2/- $y'' - 3y' + 2y = 0 \; -- (E_4)$

بنفس الطريقة نجد: $m^2 - 3m + 2 = 0$ (0,5)

$\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$

إذن، نقبل حلين $m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$ (0,5)

$m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

إذن حل المعادلة من الشكل: (0,5) $\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}}$ $/ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

/3- إيجاد الحل الخاص بـ (E_4) :

$\begin{cases} y'(0) = -2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 2c_1 + c_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -4 \end{cases}$ (0,5)

$\boxed{y = e^{2x} - 4e^{x}}$ (0,5)

التمرين الثالث:

1/- حساب مايلي

$Tr(A) = 2 - 1 + 0 = 1$ (1

$$3A^t = 3\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ (1

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$ (1

2/- حساب $\det(A)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$ (0,25

$$= -4 + 2(-3) = -10$$ (0,25

- استنتاج قابلية القلب للمصفوفة. بما أن $\det A \neq 0$ فإن A قابلة للقلب. (1

3/- إيجاد حلول المعادلة: $AX = B$

1/ إستعمال طريقة كرامر: نضع $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{4}{10}$$ (0,25

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{9}{10}$$ (0,25

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{1}{10}$$ (0,25

ومنه

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} \\ \frac{9}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$ (0,25

2) طريقة مقلوب مصفوفة :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B^t = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & -8 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$ 1

$$X = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 4/10 \\ 9/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$ 1