<table>
<tr><td colspan="4">Université Abbes LAGHROUR Khenchela</td></tr>
<tr><td colspan="2">Faculté des sciences & de Technologie</td><td colspan="2">Département Génie Mécanique</td></tr>
<tr><td>Niveau : 1-Master CM</td><td><u>Examen</u> <u>final</u> : systèmes mécaniques articulés</td><td>Durée : 1 H30.</td><td>15-04-2024</td></tr>
</table>

Exercice 1(06pts) :

Partant d'un repère fixe $F0$:

- le repère $F1$ est obtenu suite à une rotation $de\ {}^{\pi}/_{2}\ autour\ à\ l'axe\ fixe\ X$ du repère $F0$.
- Ensuite $le\ repere\ F2$ est obtenu par une translation de $4cm$ lelong de l'axe actuel Z,
- Enfin, le repère $F3$ est obtenu par une translation de $-2\ cm$ lelong de l'axe fixe-X,

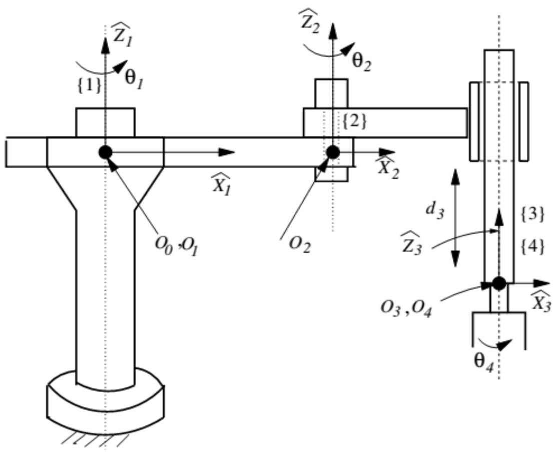
1. Donner la represention graphique de cette transformation ?
2. Calculer la matrice homogène finale H correspondante ?

soit ${}^{3}P = [1, 2, -1]^{T}$ les coordonnées de P relative au repère F3.

3. En utilisant H, calculer les coordonnées de P dans le repère-fixe (${}^{0}P$) .

Exercice 2(08pts) :MGD

Soit le robot manipulateur SCARA suivant :



1. Donner la table *DH*-Modifiée correspondante.
2. Calculer les matrices Homogènes; H_i^{i-1}
3. Déduire la position cartésienne de l'outil terminal.

Exercice 3(06pts) : Jacobien

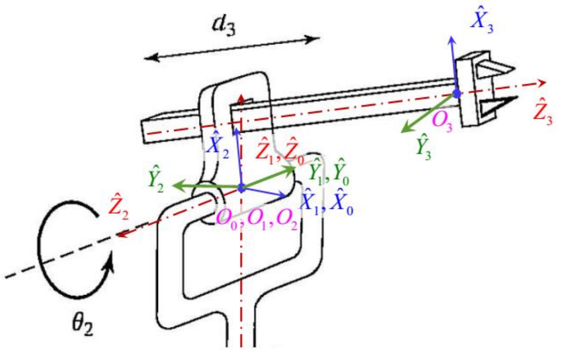
Soit un robot à 3ddls RRP dont l'objectif est de déterminer la vitesse (linéaire et angulaire)

$V_3^3 = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_3^3$, de l'outil terminal (End Effector) en fonction des vitesses articulaires :

1- Calculer la position cartésienne de l'End Effector ?
2- Déduire la jacobéenne analytique (Utiliser la dérivée).

En utilisant la propagation de vitesses,

3- Calculer la jacobéenne géométrique, de l'outil terminal du robot, relative au repère {3}, puis relative au repère {0}.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	90	θ_2	0
3	a_2= Const.	90	0	d_3

Annexe :

- ***Matrice*** de ***transformation homogène de passage*** entre les articulations $\{\mathbf{i}\}$ **et** $\{\mathbf{i-1}\}$.

$$
{}^{i-1}_{i}[T] = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} d_i \\ s_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

- ✓ ***Matrices de passages pour l'exercice 3***

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}_{2}R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{2}_{3}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

- ✓ ***Lois de propagation des vitesses angulaires et linéaires :***

$$
{}^{i}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i}\vec{\omega}_i + {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}\vec{z}_{i+1}\left(\dot{\theta}_{i+1}\right)
$$

$$
{}^{i+1}\vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\vec{\omega}_i + {}^{i+1}\vec{z}_{i+1}\left(\dot{\theta}_{i+1}\right) = {}^{i+1}_{i}R \cdot {}^{i}\vec{\omega}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \left(\dot{\theta}_{i+1}\right)
$$

$$
{}^{i+1}\vec{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

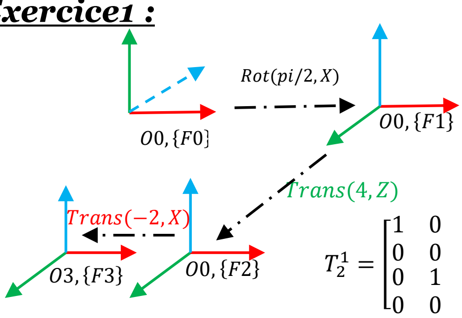
$$
\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \left({}^{0}_{i}R\, {}^{i}\vec{P}_{i,i+1}\right) + {}^{0}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}\vec{z}_{i+1}\dot{d}_{i+1}
$$

$$
{}^{i}\vec{v}_{i+1} = {}^{i}\vec{v}_i + {}^{i}\vec{\omega}_i \times {}^{i}\vec{P}_{i,i+1} + {}^{i}_{i+1}R \cdot {}^{i+1}\vec{z}_{i+1}\dot{d}_{i+1}
$$

$$
{}^{i+1}\vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \cdot \left({}^{i}\vec{v}_i + {}^{i}\vec{\omega}_i \times {}^{i}\vec{P}_{i,i+1}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{d}_{i+1} \end{bmatrix}^T
$$

Solution :

Exercice1 :



$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2/ On obtient graphiquement $H = T_3^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3/ $P^0 = H.P^3$

D'où $P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exercice2 :

Table 3: The D-H parameters of a SCARA manipulator

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	a_1	0	θ_2
3	0	a_2	$-d_3$	0
4	0	0	0	θ_4

1/

2/ Matrices de passages

$${}^0_1[T] = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1_2[T] = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2_3[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^3_4[T] = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

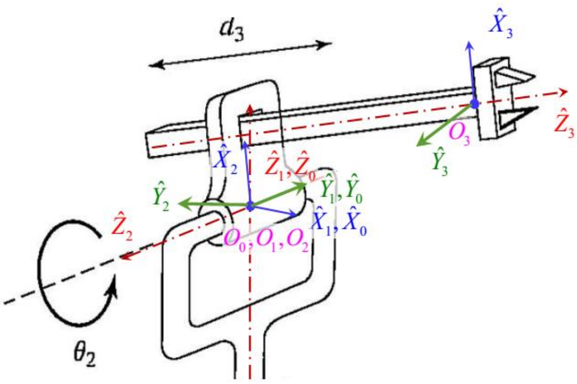
The transformation matrix ${}^0_4[T]$ is obtained as

$$\begin{aligned} {}^0_4[T] &= {}^0_1[T]\,{}^1_2[T]\,{}^2_3[T]\,{}^3_4[T] \\ &= \begin{pmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3/ La position de l'outil terminal est donnée par les trois premiers éléments de la 4^{ieme} colonne de T_4^0 ,i.e

$$x = a_1c_1 + a_2c_{12}$$
$$x = a_1s_1 + a_2s_{12}$$
$$z = -d_3$$

Exercice3 :



i	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	90	θ_2	0
3	a_2= Const.	90	0	d_3

$$
{}^{i-1}_{i}[T] = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}}d_i \\ s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
T_3^0 = T_1^0.T_2^1.T_3^2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1 & c_1s_2 & a_2c_1c_2 + d_3c_1s_2 \\ s_1c_2 & -c_1 & s_1s_2 & a_2s_1c_2 + d_3s_1s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2s_2 - d_3c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

1 : La position cartésienne de l'end effector est donnée par la 4ieme colonne de T_3^0.

$$
X = \begin{bmatrix} x = a_2c_1c_2 + d_3c_1s_2 \\ y = a_2s_1c_2 + d_3s_1s_2 \\ z = a_2s_2 - d_3c_2 \end{bmatrix}
$$

2 : La jacobéenne analytique de l'end effector est

$$
J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial d_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial d_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2s_1c_2 - d_3s_1s_2 & -a_2c_1s + d_3c_1c_2 & c_1s_2 \\ a_2c_1c_2 + d_3c_1s_2 & -a_2s_1s_2 + d_3s_1c_2 & s_1s_2 \\ 0 & a_2c_2 + d_3s_2 & -c_2 \end{bmatrix}
$$

3 /Calcul de la Jacobéenne géométrique (Par propagation de vitesse) de l'OT.

$$
{}^1_2R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, {}^1_2\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2_3R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, {}^2_3\vec{P} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -d_3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^3\vec{\omega}_3 = {}^3_2R \cdot {}^2\vec{\omega}_2
$$

$$
{}^3\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1\vec{\omega}_1 = {}^1_0R \cdot {}^0\vec{\omega}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^2\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
$$

Velocity propagation from link to link

- Example (Solution)
  - One can put ${}^{3}\vec{v}_3$ and ${}^{3}\vec{\omega}_3$ in the following form

$$\begin{bmatrix} {}^{3}\vec{v}_3 \\ {}^{3}\vec{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d_3 & 0 \\ -s\theta_2 d_3 - c\theta_2 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 1 \\ s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c\theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^{3}\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^{3}\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ -s\theta_2\dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2\dot{\theta}_1 a_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_3 + \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Velocity propagation from link to link

- Example (Solution)

$${}^{3}\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^{3}\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ -s\theta_2\dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2\dot{\theta}_1 a_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_3 + \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

- Expressed in {0} frame

$${}^{0}\vec{\omega}_3 = {}^{0}_{3}R \cdot {}^{3}\vec{\omega}_3$$

End of the solution

$${}^{0}\vec{v}_3 = {}^{0}_{3}R \cdot {}^{3}\vec{v}_3$$

Example (Solution)

$${}^{1}\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^{2}\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad {}^{3}\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}\vec{v}_1 = {}^{1}_{0}R \cdot \left({}^{0}\vec{v}_0 + {}^{0}\vec{\omega}_0 \times {}^{0}\vec{P}_{0,1}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^{2}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^{3}\vec{v}_3 = {}^{3}_{2}R \cdot \left({}^{2}\vec{v}_2 + {}^{2}\vec{\omega}_2 \times {}^{2}\vec{P}_{2,3}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 \\ -d_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^{3}\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ \dot{\theta}_2 a_3 \\ -s\theta_2\dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2\dot{\theta}_1 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ -s\theta_2\dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2\dot{\theta}_1 a_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_3 + \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

17