Université Abbes Laghrour Khenchela

Faculté des Sciences et de la Technologie

Départements: G C - G M

Niveau: L2

Module: Mathématiques 4 *Année universitaire: 2023-2024*

SOLUTION D'ETAILL'EE DE L'EXAMEN DE MATHS 4

Exercice 1 (06 points)**.**

a) La fonction f sous la forme algébrique

- $f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y.$
- $f(z) = 2^{z^2} = e^{z^2 log(2)} = 2^{(x^2-y^2)}\left\{\cos(2xyln2) + i\sin(2xyln2)\right\}.$
- $f(z) = ch(z-i) = ch(x+i(y-1)) = ch(x)\cos(y-1) + ish(x)\sin(y-1).$
- $f(z) = sinz = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = ch(y)\sin(x) + ish(y)\cos(x).$

b) Calculer $i^i,\ (1-i)^{3-3i},\ log(1+i).$

- $i^i = e^{ilog(i)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k},\ k \in \mathbb{Z}$
- $(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i)log(1-i)} = \sqrt[3]{2}e^{3(\frac{-1}{4}+2k)\pi}\left\{\cos(\frac{3\pi}{4} - 2ln\sqrt{2}) - i\sin(\dfrac{3\pi}{4} - 2ln\sqrt{2})\right\}.$
- $log(1+i) = ln|1+i| + iArg(1+i) = ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}.$

Exercice 2 (06 points)**.**

a) La fonction $u = 2x(1-y)$ est harmonique car : $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

b) Pour trouver une fonction v pour que $f = u + v$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2x) = 2x \tag{2}$$

En intégrant l'équation (1) *par rapport à* y*, il vient*

$$v = 2y - y^2 + C_1(x), \tag{3}$$

ou $C_1(x)$ *est une fonction réelle de* x*.*
Par substitution de (3) *dans* (2) *on obtient*

$$\frac{d}{dx}C_1(x) = 2x \to C_1(x) = x^2 + k, \tag{4}$$

ou k *désigne une constante. D'ou de* (3)

$$v = 2y - y^2 + x^2 + k. \tag{5}$$

c) *On a* $f(z) = u + iv = 2x(1-y) + i(2y - y^2 + x^2 + k)$*.*

En remplaçant x *par* $\frac{z+\bar{z}}{2}$ *et* y *par* $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ *on obtient*

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+\bar{z})(1 - \frac{z-\bar{z}}{2i}) + i\left(\frac{z-\bar{z}}{i} - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + k\right) \\ &= 2z + i(z^2 + k). \end{aligned}$$

Exercice 3 (08 points)**.**

a) *En remplaçant* y *par* $2x^2$*, l'intégrale donnée a alors pour valeur*

$$\begin{aligned} \oint_C (x^2 - iy^2)\ dz &= \int_{x=1}^{2} \{x^2 - i(2x^2)^2\}\{dx + id(2x^2)\} \\ &= \int_{x=1}^{2} (x^2 - 4ix^4)(dx + 4ixdx) \\ &= \frac{511}{3} - \frac{49}{5}i. \end{aligned}$$

b) *Le long du segment de droite d'extrémités (1,2) et (1,8),* $x = 1, dx = 0$ *et l'intégrale vaut*

$$\int_{y=2}^{8} (1^2 - iy^2)(0 + idy) = 168 + 6i.$$

Le long du segment de droite d'extrémités (1,8) et (2,8), $y = 8, dy = 0$ *et l'intégrale vaut*

$$\int_{x=1}^{2} (x^2 - i8^2)(dx + i0) = \frac{7}{3} - 64i.$$

Le résultat demandé est donc $168 + 6i + \frac{7}{3} - 64i = \frac{511}{3} - 58i$*.*

c) Une équation de la droite joignant (1,2) à (2,8) est $y = 6x - 4$. *D'ou la valeur de l'intégrale est*

$$\int_{x=1}^{2} (x^2 - i(6x-4)^2)(dx + id(6x-4)) = \frac{511}{3} - 14i.$$

Bon Courage