

Université Abbes LAGHROUR Khenchela			
Faculté des sciences & de Technologie		Département Génie Mécanique	
Niveau : 1-Master CM	<u>Examen final</u> : systèmes mécaniques articulés	Durée : 1 H30.	15-04-2024

GUESSAM.A

Exercice 1(06pts) :

Partant d'un repère fixe F_0 :

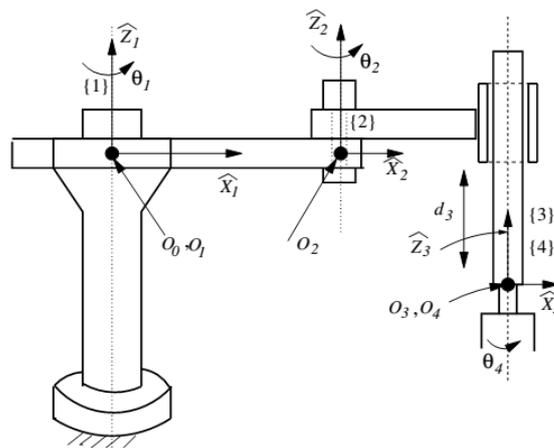
- le repère F_1 est obtenu suite à une rotation de $\pi/2$ autour à l'axe fixe X du repère F_0 .
 - Ensuite le repère F_2 est obtenu par une translation de 4cm lelong de l'axe actuel Z ,
 - Enfin, le repère F_3 est obtenu par une translation de -2 cm lelong de l'axe fixe- X ,
1. Donner la representation graphique de cette transformation ?
 2. Calculer la matrice homogène finale H correspondante ?

soit ${}^3P = [1, 2, -1]^T$ les coordonnées de P relative au repère F_3 .

3. En utilisant H , calculer les coordonnées de P dans le repère-fixe (0P).

Exercice 2(08pts) :MGD

Soit le robot manipulateur SCARA suivant :



1. Donner la table DH -Modifiée correspondante.
2. Calculer les matrices Homogènes; H_i^{i-1}
3. Déduire la position cartésienne de l'outil terminal.

Exercice 3(06pts) : Jacobien

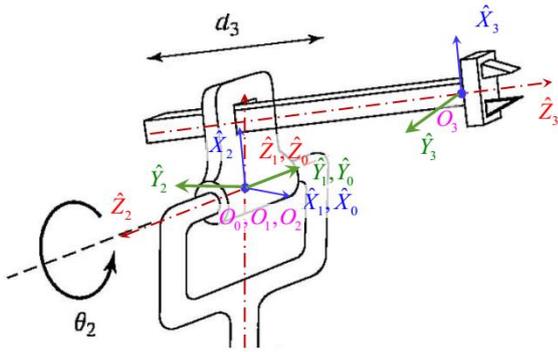
Soit un robot à 3ddl RRP dont l'objectif est de déterminer la vitesse (linéaire et angulaire)

$V_3^3 = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}_3$, de l'outil terminal (End Effector) en fonction des vitesses articulaires :

- 1- Calculer la position cartésienne de l'End Effector ?
- 2- Déduire la jacobéenne analytique (Utiliser la dérivée).

En utilisant la propagation de vitesses,

- 3- Calculer la jacobéenne géométrique, de l'outil terminal du robot, relative au repère {3}, puis relative au repère {0}.



i	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	90	θ_2	0
3	$a_2 =$ Const.	90	0	d_3

Annexe :

- ✓ **Matrice de transformation homogène de passage** entre les articulations $\{i\}$ et $\{i - 1\}$.

$${}^{i-1}_i [T] = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓ **Matrices de passages pour l'exercice 3**

$${}^0_1 T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2 R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2_3 R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ **Lois de propagation des vitesses angulaires et linéaires :**

$${}^i \vec{\omega}_{i+1} = {}^i \vec{\omega}_i + {}^{i+1}_i R \cdot {}^{i+1} \vec{z}_{i+1} (\dot{\theta}_{i+1})$$

$${}^{i+1} \vec{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_i R \cdot {}^i \vec{\omega}_i + {}^{i+1} \vec{z}_{i+1} (\dot{\theta}_{i+1}) = {}^{i+1}_i R \cdot {}^i \vec{\omega}_i + [0 \ 0 \ 1]^T \cdot (\dot{\theta}_{i+1})$$

$${}^{i+1} \vec{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

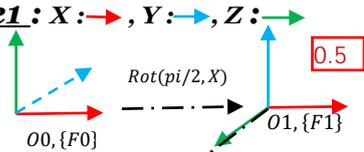
$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times ({}^0_i R \cdot {}^i \vec{P}_{i,i+1}) + {}^{i+1}_i R \cdot {}^{i+1} \vec{z}_{i+1} \dot{d}_{i+1}$$

$${}^i \vec{v}_{i+1} = {}^i \vec{v}_i + {}^i \vec{\omega}_i \times {}^i \vec{P}_{i,i+1} + {}^{i+1}_i R \cdot {}^{i+1} \vec{z}_{i+1} \dot{d}_{i+1}$$

$${}^{i+1} \vec{v}_{i+1} = {}^{i+1}_i R \cdot ({}^i \vec{v}_i + {}^i \vec{\omega}_i \times {}^i \vec{P}_{i,i+1}) + [0 \ 0 \ \dot{d}_{i+1}]^T$$

Solution :

Exercice1 : X:→, Y:→, Z:→



$$T_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0.5$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0.5$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0.5$$

2/ On obtient graphiquement $H = T_3^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3/ $P^0 = H \cdot P^3$ 1pt

$$\text{D'où } P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0.2\text{pts}$$

Exercice2 :

Table 3: The D-H parameters of a SCARA manipulator

01ptx4

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	a_1	0	θ_2
3	0	a_2	$-d_3$	0
4	0	0	0	θ_4

$${}^2_3[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^3_4[T] = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The transformation matrix ${}^0_4[T]$ is obtained as 0.5

$${}^0_4[T] = {}^0_1[T] {}^1_2[T] {}^2_3[T] {}^3_4[T] = \begin{pmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0.5$$

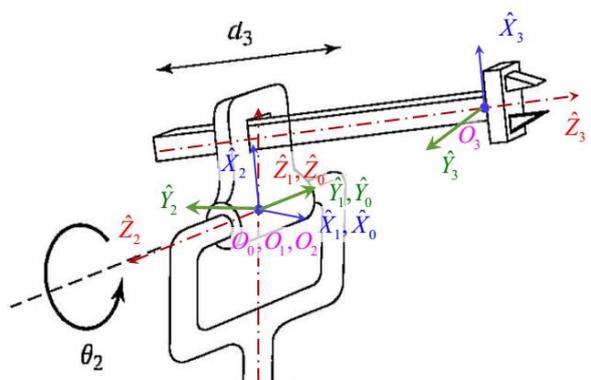
1/ 2/ Matrices de passages

$${}^0_1[T] = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1_2[T] = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0.5$$

3/ La position de l'outil terminal est donnée par les trois premiers éléments de la 4^{ème} colonne de T_4^0 , i.e

$$\begin{aligned} x &= a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ x &= a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ z &= -d_3 \end{aligned} \quad 0.5 \times 3$$

Exercice3 :



i	α_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	90	θ_2	0
3	$a_2 =$ Const.	90	0	d_3

$${}^i{}_{i-1}[T] = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 & c_1 s_2 & a_2 c_1 c_2 + d_3 c_1 s_2 \\ s_1 c_2 & -c_1 & s_1 s_2 & a_2 s_1 c_2 + d_3 s_1 s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2 s_2 - d_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 : La position cartésienne de l'end effector est donnée par la **4ieme colonne de T_3^0** .

$$X = \begin{bmatrix} x = a_2 c_1 c_2 + d_3 c_1 s_2 \\ y = a_2 s_1 c_2 + d_3 s_1 s_2 \\ z = a_2 s_2 - d_3 c_2 \end{bmatrix} \quad (02pts)$$

2 : La jacobéenne analytique de l'end effector est

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial d_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial d_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 s_1 c_2 - d_3 s_1 s_2 & -a_2 c_1 s_2 + d_3 c_1 c_2 & c_1 s_2 \\ a_2 c_1 c_2 + d_3 c_1 s_2 & -a_2 s_1 s_2 + d_3 s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ 0 & a_2 c_2 + d_3 s_2 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (02pts)$$

3 / Calcul de la Jacobéenne géométrique (Par propagation de vitesse) de l'OT.

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, {}^1_2\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^2_3R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, {}^2_3\vec{P} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -d_3 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^3\vec{\omega}_3 = {}^3_2R \cdot {}^2\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} s\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\vec{\omega}_1 = {}^1_0R \cdot {}^0\vec{\omega}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^2\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ c\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Velocity propagation from link to link

• Example (Solution)

– One can put ${}^3\vec{v}_3$ and ${}^3\vec{\omega}_3$ in the following form

$$\begin{bmatrix} {}^3\vec{v}_3 \\ {}^3\vec{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d_3 & 0 \\ -s\theta_2 d_3 - c\theta_2 a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 1 \\ s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c\theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^3\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ -s\theta_2 \dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2 \dot{\theta}_1 a_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_3 + \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Velocity propagation from link to link

• Example (Solution)

$${}^3\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ -s\theta_2 \dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2 \dot{\theta}_1 a_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_3 + \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

– Expressed in {0} frame

$${}^0\vec{\omega}_3 = {}^0R \cdot {}^3\vec{\omega}_3$$

$${}^0\vec{v}_3 = {}^0R \cdot {}^3\vec{v}_3$$

End of the solution

Example (Solution)

$${}^1\vec{v}_1 = {}^1R \cdot ({}^0\vec{v}_0 + {}^0\vec{\omega}_0 \times {}^0\vec{P}_{0,1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^1\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \quad {}^2\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ c\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad {}^3\vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ -c\theta_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^3\vec{v}_3 = {}^3R \cdot ({}^2\vec{v}_2 + {}^2\vec{\omega}_2 \times {}^2\vec{P}_{2,3}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ c\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 \\ -d_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ \dot{\theta}_2 a_3 \\ -s\theta_2 \dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2 \dot{\theta}_1 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 d_3 \\ -s\theta_2 \dot{\theta}_1 d_3 - c\theta_2 \dot{\theta}_1 a_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_3 + \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

17