Université abbès laghrour khenchela

Faculté des Sciences et de la Technologie   Matière : Méthodes numériques

Département Génie Mécanique   **12/05/2024**

Examen Final

Exercice 1: 3 Points

Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à $0.5\ 10^{-3}$ près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx$.

Exercice 2: 5 Points

On considère la fonction $f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 10$ sur l'intervalle [1,2].

1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction $f(x)$ dans [1,2] et qu'il est unique.
2. Il existe plusieurs façons pour écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$:

$$x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10, \quad \text{et} \quad x = g_2(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$$

Quelle est parmi les deux fonctions $x = g_i(x), i = 1,2,$ celles qui vérifient les conditions du point fixe ?

Exercice 3: 6 Points

Soit la tabulation de la fonction $f\ (x)\ =\ \sqrt{x}$ donnee comme suit:

x	1.0	2.0	3.0
$f(x)$	1.0000	1.4142	1.7321

1. Trouver la parabole qui passe par ces points par **la methode de Lagrange**.
2. Calculer une approximation de $\sqrt{2.9}$ avec le polynome obtenu.
3. Estimer le nombre de chiffres significatifs de cette approximation

Exercice 4: 6 Points

Soit l'équation différentielle à condition initiale: $y' = -y + t + 1$ et $y(0) = 1$.

1. Montrer que ce problème admet une solution unique.
2. Approcher la solution de cette équation en $t = 0.2$ à l'aide de la méthode de **RK4** en prenant un pas d'intégration $h = 0.1$ (effectuer les calculs avec six décimales) .
3. Comparer les résultats obtenus avec la solution exacte : $y_{Exacte} = e^{-t} + t$

Bonne chance

Exo 1 : On a $I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$ 0,5

L'erreur de la méthode de Simpson est donnée par :

$$|E_S(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot M \quad \text{où} \quad M = \max_{\xi \in [-\pi,\pi]} |f^{(4)}(\xi)|$$ 1

On a :

$$f(x) = f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow M = \max_{\xi \in [-\pi,\pi]} |f^{(4)}(\xi)|$$

$$= 1.$$ 0,5

$$\Rightarrow |E_S(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot M = \frac{2\pi}{180} \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \cdot 1$$

Ainsi que : $|E_S(f)| \leq 0,5 \times 10^{-3}$ alors :

$$\frac{\pi \cdot 16}{90} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \leq 0,5 \times 10^{-3} \Rightarrow n^4 \geq \frac{1}{0,5 \times 10^{-3}} \cdot \frac{\pi \cdot 16 \cdot \pi^4}{90}$$

1

$n \geq 18,6 \Rightarrow$ On prend $n = 20$

car le nombre de subdivision de $[\pi, \pi]$ pour la méthode de Simpson doit être pair.

Solution examen Final

Exo 2 | 05 points

On a : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $[1, 2]$

1/ L'existance et l'unicité d'un zero $\alpha \in [1,2]$

- f est Continue sur $[1,2]$
- $f(1) = -5$, $f(2) = 14 \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0$

$\Rightarrow$ 1

$$\exists\, \alpha \in [1,2],\ tq:\ f(\alpha) = 0.$$

De plus, $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$, $\forall x \in [1,2]$

$\Rightarrow$ donc f est croissante $\nearrow$. 1

$f(x)$ est monotone $\Rightarrow \alpha$ est unique.

2/ verification des Conditions du points fixe.

a/ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x + x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$$\cancel{x = -x + x^3 + 4x^2 - 10}$$

$$x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = g_1(x)$$

$x = g_1(x)$ est un pt fixe, il faut verifier les deux pts suivantes :

$$\begin{cases} 1/\ g([1,2]) \subset [1,2] \\ 2/ \max |g'(x)| \leq k < 1,\ \forall x \in [1,2] \end{cases}$$

$g_1(x)$ est bien défini et Continue sur $[1,2]$

$$\begin{cases} g_1(1) = 6 \notin [1,2] \\ g_1(2) = -12 \notin [1,2] \end{cases} \Rightarrow g_1([1,2]) \not\subset [1,2]$$

0,5

$\Rightarrow g_1(x)$ n'est pas stable

- $|g_1'(x)| \leq k < 1, \ \forall x \in [1,2]$

où $k = \max |g_1'(x)|, \ \forall x \in [1,2]$

$g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x < 0 \ , \forall x \in [1,2] \Rightarrow$

$g_1(x)$ est décroissante.

$|g_1'(2)| \geq |g_1'(x)| \geq |g_1'(1)| \Rightarrow$

$27 \geq |g'(x)| \geq 10 > 1 \Rightarrow g_1(x)$ n'est pas

1

Contractante.

Alors $g_1(x)$ ne vérifie pas les Condition du pt fixe.

b/ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x+4) = 10$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{x+4}$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2} = g_2(x)$

- $g_2([1,2]) \subset [1,2]$

$g_2(x)$ est bien défini et Continue sur $[1,2]$

$g_2(1) = \sqrt{2} = 1{,}41 \in [1,2]$

$g_2(2) = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1{,}29 \in [1,2]$ $\Rightarrow g([1,2]) \subset [1,2]$ 0,5

$\Rightarrow g_2(x)$ est stable.

- $g_2'(x) = \dfrac{-5}{\sqrt{10}\,(4+x)^{3/2}} < 0,\ \forall x \in [1,2]$

$\Rightarrow g_2(x)$ est $\searrow$

$|g'(2)| \leq |g'(x)| \leq |g'(1)| \Rightarrow 0{,}1 \leq |g'(x)| \leq 0{,}14$

1

$K = \max|g'(x)| = |g_2'(x)| = 0{,}14 < 1$

$\Rightarrow g_2(x)$ est contractante

$\Rightarrow g_2(x)$ vérifies les condition de contractante pt fixe.

Exo 3:

1/ P_2 le polynome est :

$$P_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 1{,}4142\,\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$+ 1{,}7321\,\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$= 0{,}5(x-2)(x-3) - 1{,}4142\,(x-1)(x-3)$$

$$+ 0{,}86605\,(x-1)(x-2).$$ 2

$$= 0{,}45185\,x^2 - 1{,}94135\,x + 3{,}4895$$

2/ $P_2(2{,}9) \simeq \cancel{1}\,1{,}7046$ 2

| l'erreur commise avec le polynome $P_2(x)$ est

$\exists c \in [1,3]$, $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1)(x-2)(x-3)$

et $f^{(3)}(x) = \left(\frac{3}{8}\right) x^{-\frac{5}{2}}$ est $x \in [1,3]$ on a

$1 \leq x \leq 3$, $\frac{3}{8} \geq \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \geq \left(\frac{3}{8}\right) 3^{-\frac{5}{2}}$

1 $\frac{3}{8} \geq |f^{(3)}(x)| \geq \left(\frac{3}{8}\right) x^{-\frac{5}{2}}$

donc: $|R_2(x)| \leq \frac{3/8}{6} |x-1||x-2||x-3|$

pour $x = 2,9$ l'erreur est majorée comme suit: $|R_2(2,9)| \leq \frac{\frac{3}{8}}{6} |2,9-1||2,9-2||2,9-3|$

$\simeq 0,01 = 0,1 \times 10^{-1} \leq 0,5 \times 10^{-1}$ 1

enfin $f(2,9) \simeq 1,7$ avec deux chiffres significatifs.

Exo 4

$$\begin{cases} y' = \cancel{y^2} - y + t + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1/ Verifions la condition de Lipchitz sur $t \in [0, 0,3]$, et $y \in \mathbb{R}$.

Remarquons que la fonction $f(t,y) = -y + t + 1$. 1 est continue sur $[0, 0,3] \times \mathbb{R}$, de plus elle est lipschitzienne par rapport à y sur $[0, 0,3]$

avec la Constante de Lipschitz $L = 1$:

$\forall\, t \in [0, 0{,}2]$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ On a

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |-y_1 + t + 1 + y_2 - t - 1|$$

$$= |-y_1 + y_2| = |-1|\,|y_1 - y_2| \leq 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

ou :

$$\max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max |-1| = 1 \leq 1 = L \quad (1)$$

Alors le pb admet une solution unique

2) $h = 0{,}1$. La méthode de RK4 est donnée par

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

$$K_1 = f(t_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} K_2\right)$$

$$K_4 = f\left(t_i + h, y_i + h K_3\right)$$

$\boxed{i = 0}$

$$K_1 = f(t_0, y_0) = -y_0 + t_0 + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

$$K_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_1\right) = -\cancel{y_0} + \cancel{y_0} + \frac{h}{2} + \cancel{1} = 0{,}05$$

$$K_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_2\right) = -y_0 - \frac{h}{2} K_2 + t_0 + \frac{h}{2} + 1$$

$$= 0{,}04750$$

$$K_4 = f\left(t_0 + h, y_0 + h K_3\right) = -y_0 - h K_3 + t_0 + h + 1$$

$$= 0{,}095250$$

donc, $y_1 = y_0 + \frac{0{,}1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$= 1{,}004837$ 1,5

Pour $\boxed{i = 1}$,

$$\begin{cases} k_1 = f(t_1, y_1) = 0{,}9516 \\ k_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1) = 0{,}140404 \\ k_3 = f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2) = 0{,}13814 \\ k_4 = f(t_1 + h, y_1 + hk_3) = 0{,}18730 \end{cases}$$

donc, $y_2 = 1{,}01873$ 1,5

2/ $y_{exacte} = e^{-t} + t$

$|y_{RK4}(0{,}2) - y_{exacte}| = |1{,}018730 - 1{,}0187311|$

$= 0{,}148 \times 10^{-6}$ 1

On constate que l'erreur se ~~sat~~ situe autour de 10^{-6} ~~ce qui se compare~~