Université Abbés Laghrour Khenchela

Dép-Math-Info 1ére Master-Maths 23-24 Mod: Méth-Num 2-Durée: 90Min

EXAMEN FINAL (**Compte rendu**)

Exercice1 (10pts)

Soit le problème suivant:

$$(PC)\begin{cases} -\beta u''(x)+\alpha u(x)=f(x),\ \alpha>0,\ x\in I=]a,b[\ \ldots\ldots(1) \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$$

On pose $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma, \frac{1}{\beta}f(x)=g(x)$

$$(PC)\begin{cases} -u''(x)+\gamma u(x)=g(x),\ \gamma>0,\ x\in I=]a,b[\ \ldots\ldots(1) \\ \text{et} \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$$

1. La formulation variationnelle (PV) du problème (PC)

   Soit une fonction $v\in C^1([a,b])$, nulle en a et b.

Soit $V=\{v\in C^1([a,b]); v(a)=v(b)=0\}$ un sous espace de $C^1([a,b])$ ....**.......(0.5pt)**

$$-u''(x)v(x)+\gamma u(x)v(x)=g(x)v(x),\ \forall v\in V\subset H_0^1$$

En intégrant par parties, il vient:

$$\int_a^b[-u''(x)v(x)+\gamma u(x)v(x)]\,dx=\int_a^b g(x)v(x)dx$$

donc

$$(PV)\int_a^b[u'(x)v'(x)+\gamma u(x)v(x)]\,dx=\int_a^b g(x)v(x)dx\ldots\ldots\ldots\textbf{(0.5pt)}\qquad(1)$$

2. On pose

$$a(u,v)=\int_a^b[u'(x)v'(x)+\gamma u(x)v(x)]\,dx;\ L(v)=\int_a^b g(x)v(x)dx;\forall v\epsilon V$$

$$a(u,v)=\ L(v);\ \forall v\epsilon V\textbf{.......(0.25pt)}\qquad((2))$$

On applique le théorème de Lax-Milgram sur (2)

1. a est une forme bilinéaire, et L est un opérateur linéaire

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left|\int_a^b[u'(x)v'(x)+\gamma u(x)v(x)]\,dx\right|\le\int_a^b|u'(x)v'(x)+\gamma u(x)v(x)|\,dx\\ &\le \int_a^b|u'(x)v'(x)|\,dx+\gamma\int_a^b|u(x)v(x)|\,dx\end{aligned}$$

$$\int_a^b|u'(x)v'(x)|\,dx\overset{\text{Cauchy.S}}{\le}\|u'(x\|_{L^2(]a,b[)}\|v'(x)\|_{L^2(]a,b[)}\le\|u(x\|_V\|v(x)\|_V\ ;$$

$$\begin{aligned}\int_a^b|u(x)v(x)|\,dx &\le \|u(x)\|_{L^2(]a,b[)}\|v(x)\|_{L^2(]a,b[)}\\ &\le C_1\|u'(x)\|_{L^2(]a,b[)}\ C_2\|v'(x)\|_{L^2(]a,b[)}\ \textbf{(Poincarré)}\\ &\le C_3\|u(x)\|_V\ \ \|v(x)\|_V\ \textbf{......(0.5pt)}\end{aligned}$$

$|a(u,v)|\le(1+\gamma C_3)\|u(x\|_V\|v(x)\|_V$, donc a est une forme bilinéaire continue car

$$a(u,u)=\int_a^b\left[(u'(x))^2+\gamma(u(x))^2\right]dx=\int_a^b[u'(x)]^2\,dx+\gamma\int_a^b[u(x)]^2\,dx$$

$$\int_a^b[u'(x)]^2\,dx=\|u'(x)\|^2_{L^2(]a,b[)}\ge\frac{1}{C}\|u(x)\|^2_{L^2(]a,b[)}\ ;\quad\int_a^b[u(x)]^2\,dx=\|u(x)\|^2_{L^2(]a,b[)}$$

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_a^b\left[(u'(x))^2+\gamma(u(x))^2\right]dx\ge\left(\frac{1}{C}+\gamma\right)\|u(x)\|^2_{L^2(]a,b[)}\\ a(u,u) &\ge M\|u\|^2_{L^2(]a,b[)}\ \text{, donc } a \text{ est coercive}\textbf{......(0.5pt)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L(v)| &= \left|\int_a^b g(x)v(x)dx\right|\le\|g(x)\|_{L^2(]a,b[)}\|v(x)\|_{L^2(]a,b[)}\\ &\le \|g(x)\|_{L^2(]a,b[)}C\|v'(x)\|_{L^2(]a,b[)}\\ &\le C\|g(x)\|_{L^2(]a,b[)}\|v\|_V\\ &\le K\|v\|\ \text{, donc } L \text{ est linéaire}\textbf{......(0.5pt)}\end{aligned}$$

D'aprés le théorème de Lax-Milgram (PV) admet une sol unique.

3. Appliquons **la méthode des éléments finis** au problème (PC) avec une discrétisation uniforme de $[a,b]$ $(h=\frac{b-a}{N}, x_j=jh)$.

Une solution de la forme variationnelle (1) s'appelle solution faible du problème diffrentiel de départ.

On cherche alors a écrire un problème approchè dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\widetilde{V}=\{\widetilde{u}\in C^1([a,b]); u(a)=u(b)=0\}$ un sous-espace vectoriel de V de dimension finie N.....**......(0.25pt)**

Soient $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V . Ces fonctions constituent une base du sous-espace $\widetilde{V}$ .....**......(0.25pt)**

Si $\widetilde{u}\in\widetilde{V}$ alors :$\widetilde{u}=\sum_{j=1}^{N-1}\varphi_j u_j$,on remplace dans (1) on trouve

$$\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{N-1}\varphi'_j u_j\widetilde{v}'(x)(x)+\gamma\sum_{j=1}^{N-1}\varphi_j u_j\widetilde{v}(x)\right]dx=\int_0^1 g(x)\widetilde{v}(x)dx,\ \ \forall\widetilde{v}\in\widetilde{V}\ldots\textbf{....(0.5pt)}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{N-1}\int_0^1\left[\varphi'_j\widetilde{v}'(x)(x)+\gamma\varphi_j\widetilde{v}(x)\right]u_j\right]dx=\int_0^1 g(x)\widetilde{v}(x)dx,\quad\forall\widetilde{v}\in\widetilde{V}\ldots\textbf{....(0.5pt)}\qquad(2)$$

On prend $\widetilde{v}(x)=\varphi_i(x)$ on trouve

$$\left[\sum_{j=1}^{N-1}\int_a^b\left[\varphi'_j(x)\varphi_i{}'(x)+\gamma\varphi_j(x)\varphi_i(x)\right]u_j\right]dx=\int_a^b g(x)\varphi_i(x)dx,\quad\forall\varphi_i\in\widetilde{V},\ i=\overline{1,N-1}\textbf{....(0.5pt)}\qquad(3)$$

On pose

$$A_{i\,j}=\int_a^b\left[\varphi'_j(x)\varphi_i{}'(x)+\gamma\varphi_j(x)\varphi_i(x)\right]u_j dx,\ D_i=\int_a^b g(x)\varphi_i(x)dx\textbf{....(0.5pt)}\qquad(4)$$

Choix des fonctions φ_i

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & ,\ x_{i-1}\le x\le x_i\\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\end{cases}\qquad\textbf{....(0.5pt)}$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{i,i} & A_{i,\,i+1} & 0 & 0 & . & . \\ A_{i,\,i+1} & A_{i,i} & A_{i,\,i+1} & 0 & . & . \\ 0 & A_{i,\,i+1} & A_{i,i} & A_{i,\,i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,\,i+1} & A_{i,i} & A_{i,\,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & . & A_{i,\,i+1} & A_{i,i} & A_{i,\,i+1} \\ 0 & 0 & . & . & A_{i,\,i+1} & A_{i,i} \end{pmatrix},\quad D=h\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \\ \\ \\ g(x_{N-1}) \end{pmatrix} \text{....}\mathbf{(0.5pt)+(0.25pt)}$$

4 On pose $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma=\pi^4,\ g(x)=2\pi^4\sin\left(\pi^2 x\right),\ h=\frac{1}{\pi}, a=0, b=\frac{4}{\pi}$

(a) la fonction $u(x)=\sin\pi^2 x$ est une solution de (PC)..........**(0.5pt)**
On substitue dans l'équation de départ et la verification est imediate.

(b)

$$A_{i,i}=\frac{2}{h}+\frac{\gamma 2h}{3},\ A_{i,i+1}=A_{i+1,i}=\frac{-1}{h}+\frac{\gamma h}{6},\ D_i=\int_a^b g(x_i)\varphi_i(x)dx=hg(x_i)\text{....}\mathbf{(0.5pt)}$$

$$A_{i,i}=2\pi+\frac{2\pi^3}{3},\ A_{i,i+1}=A_{i+1,i}=-2\pi+\frac{\pi^3}{6},\ D_i=\int_a^b g(x_i)\varphi_i(x)dx=2\pi^3\sin\left(\pi^2 x_i\right)\text{....}\mathbf{(0.5pt)}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2\pi+\frac{2\pi^3}{3} & -2\pi+\frac{\pi^3}{6} & 0 \\ -2\pi+\frac{\pi^3}{6} & 2\pi+\frac{2\pi^3}{3} & -2\pi+\frac{\pi^3}{6} \\ 0 & -2\pi+\frac{\pi^3}{6} & 2\pi+\frac{2\pi^3}{3} \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_{N-1}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{......}\mathbf{(0.5pt)+(0.25pt}$$

(c) Trouvons la solution approchée du problème (PC).

$$U=A^{-1}.D=\begin{pmatrix} 0.12 & 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0.12 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{.........}\mathbf{(0.5pt)}$$

Exercice2 (10pts)

1. Soit le problème (P)

$$(P)\begin{cases} y'=g(x,y);\ x\in[a,b] \\ y(x_0)=y(a)=y_0 \end{cases}$$;on admet que (P) a une solution unique y.

(a) Montrons que la formule d'Adam- Bashforth d'ordre 3 est donnée par **(1.5pt)**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(23g_n-16g_{n-1}+5g_{n-2}\right);\ y_n\simeq y(x_n)\ et\ g_n=g(x_n,y_n),$$

on utilise le polynome Lagrange qui interpôle g au points x_n , x_{n-1} et x_{n-2}(la sol **voir le cours**)

(b) Montrons que l'erreur locale de cette méthode est d'ordre 4.**(1.5pt)**
d'aprés la formule deTaylor on a

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= g(x_{n+1})=y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''+\frac{h^3}{6}y_n^{(3)}+\frac{h^4}{6}y_n^{(4)}\text{......}\mathbf{(0.25pt)} \\ g_{n-1} &= g(x_{n-1})=g_n-hg_n'+\frac{h^2}{2}g_n''-\frac{h^3}{6}g_n^{(3)}+\frac{h^4}{24}g_n^{(4)}+\text{........}\mathbf{(0.25pt)} \\ g_{n-2} &= g(x_n-2h)=g_n-2hg_n'+\frac{(2h)^2}{2}g_n''-\frac{(2h)^3}{6}g_n^{(3)}+\frac{(2h)^4}{24}g_n^{(4)}+\text{....}\mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n+\frac{h}{12}\left(23g_n-16g_{n-1}+5g_{n-2}\right) \\ &= y_n+\frac{h}{12}\left[\begin{array}{c} 23g_n-16\left(g_n-hg_n'+\frac{h^2}{2}g_n''-\frac{h^3}{6}g_n^{(3)}+\frac{h^4}{24}g_n^{(4)}+\ldots\right) \\ +5\left(g_n-2hg_n'+\frac{(2h)^2}{2}g_n''-\frac{(2h)^3}{6}g_n^{(3)}+\frac{(2h)^4}{24}g_n^{(4)}\right) \end{array}\right] \\ &= y_n+hg_n+\frac{h^2}{2}g_n'+\frac{h^3}{6}g_n''-\frac{h^4}{3}g_n^{(3)} \\ &= y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''+\frac{h^3}{6}y_n^{(3)}-\frac{h^4}{3}y_n^{(4)} \\ &= y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''+\frac{h^3}{6}y_n^{(3)}+Ch^4\text{......}\mathbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

$$|y(x_{n+1})-y_{n+1}|\leq Ch^4\text{.....}\mathbf{(0.25pt)}$$

donc la méthode est d'ordre 4

2 Soit l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} y'=-y+2\cos\pi x;\ x\in[0,1] \\ y(x_0=0)=1,\ g(x,y)=-y+2\cos\pi x \end{cases}\qquad(6)$$

(a) On prend $h=\frac{1}{4}$. Calculer $y_1=y(0.25)$ par la méthode **R-K2.....(2pt)**

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2),\ k_1=g(x_n,y_n),\ k_2=g[x_n+h,y_n+hk_1] \\ k_1 &= g(x_0,y_0)=1 \\ k_2 &= g(x_n+h,y_n+hk_1)=g(h,1+h)=g(0.25,1.25)=-1.25+2\cos\frac{\pi}{4}=0.16421 \\ y_1 &= y(0.25)=y_0+\frac{h}{2}(k_1+k_2)=1.1455\text{.......}\mathbf{(01pt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= g(x_1,y_1);\ k_2=g(x_1+h,y_1+hk_1) \\ k_1 &= g(x_1,y_1)=-y_1+2\cos\pi x_1=0.26871 \\ k_2 &= g(0.5,\ y_1+hk_1)=-1.2127 \end{aligned}$$

$$y_2=y(0.5)=y(0.25+h)=y_1+\frac{h}{2}(k_1+k_2)=1.0275\text{......}\mathbf{(01pt)}$$

(b) Utiliser la méthode d'Adam- Bashforth d'ordre 3 pour calculer $y(0.75)$.

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(23g_n-16g_{n-1}+5g_{n-2}\right)$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2+\frac{h}{12}\left(23g_2-16g_1+5g_0\right) \\ y_2 &= 1.0275 \\ g_0 &= g(x_0,y_0)=1 \\ g_2 &= g(x_2,y_2)=-y_2+2\cos\pi x_2=1.0275 \\ g_1 &= g(x_1,y_1)=-y_1+2\cos\pi x_1=0.26871 \end{aligned}$$

$$y_3=1.0275+\frac{0.25}{12}\left(23*1.0275-16*0.26871+5\right)=1.5344\text{......}\mathbf{(01pt)}$$

(c) Utiliser la méthode Adam- Moulton d'ordre 3 pour calculer $y(0.75)$.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n+\frac{h}{12}\left(5g_{n+1}+8g_n-g_{n-1}\right) \\ y_3 &= y_2+\frac{h}{12}\left(5g_3+8g_2-g_1\right) \\ g_3 &= g(x_3,y_3)=-y_3+2\cos\pi x_3=-y_3-\sqrt{2} \\ y_3 &= y_2+\frac{h}{12}\left(-5y_3-5\sqrt{2}+8g_2-g_1\right) \\ y_3\left(1+\frac{5h}{12}\right) &= y_2+\frac{h}{12}\left(-5\sqrt{2}+8g_2-g_1\right) \\ y_3\left(1+\frac{5*0.25}{12}\right) &= 1.0275+\frac{0.25}{12}\left(-5\sqrt{2}+8*1.0275-0.26871\right) \\ y(0.75) &= 0.94717\text{......}\mathbf{(1pt)} \end{aligned}$$

(d) Expliquer comment utiliser la méthode **(prédicteur-correcteur)** pour calculer $y(0.75)$.

$$\begin{aligned} y_3^p &= y_2+\frac{h}{2}\left(23g_2-16g_1+5g_0\right)\ \text{par A-B}\text{......}\mathbf{(0.25pt)} \\ y_3^p &= y_2+\frac{h}{2}\left(23g_2-16g_1+5g_0\right)\ =1.5344\ \textbf{par A-B} \\ y_3^C &= y_2+\frac{h}{12}\left(5g_3+8g_2-g_1\right)\ \text{par A-M}\text{......}\mathbf{(0.25pt)} \\ g_3 &= -y_3^p+2\cos\pi x_3 \\ y_3^C &= y_n+\frac{h}{12}\left(5\left(-y_3^p+2\cos\pi x_3\right)+8g_2-g_1\right)\ \text{par A-M}\text{......}\mathbf{(0.5pt)} \\ y_3^C &= y_n+\frac{h}{12}\left(5\left(-1.5344+2\cos\pi x_3\right)+8g_2-g_1\right)=\ldots \end{aligned}$$