Correction de l′examen final

Théorie des opérateurs linéaires. 3 année maths 2023/2024

Exercice 01

On détermine l'adjoint de l'opérateur

$\forall x \in E$,

$$T(x) = <a,x> b - <b,x> a$$

Soient $x, y \in E$, on va déterminer l'adjoint T^* , en revenant à la définition

$$< T(x), y > = << a,x > b - < b,x > a, y >$$

$$= < a,x >< b,y > - < b,x >< a,y >$$

$$= < x,a >< b,y > - < x,b >< a,y >$$

$$= < x, < b,y > a - < a,y > b >$$

En déduit que

$$T^*(y) = < b,y > a - < a,y > b = -T(y)$$

Exercice 02

Pour $\|x\| = 1$, on a

$$|< Tx, x >| \leq \|Tx\| \|x\| = \|Tx\| \leq \|T\|$$

donc

$$Sup |< Tx, x >| \leq \|T\|, \|x\| = 1 \tag{1}$$

Afin détablir l'inégalité inverse, nous considérons le cas :

$x \in H$, $\|z\| = 1$, $Tz \neq 0$, et $u = \frac{1}{\lambda} Tz$, avec $\lambda = \sqrt{\|Tz\|}$

Si on note $\alpha = Sup |< Tx, x >|, \|x\| = 1$, alors on obtient

$$\|Tz\|^2 =< T(\lambda z), u >$$

$$= \frac{1}{4}[< T(\lambda z + u), \lambda z + u > - < T(\lambda z - u), \lambda z - u >]$$

$$\leq \frac{\alpha}{4}\left[\|\lambda z + u\|^2 + \|\lambda z - u\|^2\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[\|\lambda z\|^2 + \|u\|^2\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[\|\lambda\|^2 + \|Tz\|^2\right] = \alpha \|Tz\|$$

Ceci implique que pour tout $z \in H$ avec $\|z\| = 1$
on a $\|Tz\| \leq \alpha$ et donc

$$\|T\| \leq \alpha = Sup |< Tx, x >|, \quad \|x\| = 1 \tag{2}$$

de (1) et (2) , on a la démonstration.

Exercice 03

1) D'après la formule, on a

$$< f_n, f_m >= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)t + \cos(n-m)t]\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2(n+m)}\sin(n+m)t\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{1}{2(n-m)}\sin(n-m)t\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Ce qui montre que $f_n \perp f_m \; \forall n \neq m$

2) On cherche H sous la forme $H(x,y) = ax + by$

On a,

$$\|H\| = \sqrt{a^2+b^2} \; et \; H_0(x,x) = 2x \; \forall x \in \mathbb{R} \; , alors$$

$$(a+b)\, x = 2x \quad et \quad \|H\| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ce qui donne

$$\|H\| = \sqrt{a^2+b^2} \; et \quad a+b = 2$$

D'où

$$b = 2 - a \quad et \quad \|H\|^2 = 2a^2 - 4a + 4 = G(a)$$

On détermine a partir de la relation $G'(a) = 0$, ce qui nous donne $a = b = 1$.
Par conséquent,

$$H(x, y) = x + y \quad , H_0(x, x) = 2x \quad et \quad \|H_0\| \leq \|H\| = \sqrt{2}$$

Il reste à vérifie qu'il existe bien $(x, x) \in E_0$ tel que

$$|H_0(x, x)| = \sqrt{2}$$

Il suffit de prendre pour cela $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$